

# Quantitative generalizations of Niederreiter's result concerning continuants

I.D. Kan, N.A. Krotkova<sup>1</sup>

The main part of the present paper is written in Russian. Here we give a brief summary in English.

We give certain generalization of Niederreiter's result from [2] concerning famous Zaremba's conjecture on existence of rational numbers with bounded partial quotients.

Let  $a, m, s \in \mathbb{Z}_+, a \geq 2$ . We consider a sequence of integers  $a_1, \dots, a_n$  and the continuant  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Suppose that

$$a_i < N, i = 1, \dots, n, N \in \mathbb{Z}_+.$$

By  $f(a^m, N) = f_m$  we define the number of such sequences with elements bounded by  $N$  and such that

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = a^m.$$

Define polynomials  $P_s = P_s(\lambda)$  in the following way:

$$P_s(\lambda) = \begin{cases} \lambda^3 - s\lambda^2 - s\lambda - s, & \text{if } s \equiv 0 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (1) \\ \lambda^3 - (s+2)\lambda^2 + (s+2)\lambda - (s-2), & \text{if } s \equiv 2 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (2) \\ \lambda^3 - (s+2)\lambda^2 + s\lambda + (s+4), & \text{if } s \equiv 4 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (3) \\ \lambda^3 - s\lambda^2 - (s+2)\lambda + (s+2), & \text{if } s \equiv 6 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (4) \\ \lambda^2 - 4\lambda - 4, & \text{if } s = 4 \quad (5) \\ \lambda - 2, & \text{if } s = 2 \quad (6) \\ \lambda - s - 1, & \text{if } s \equiv 1 \pmod{2}, s \geq 3 \quad (7). \end{cases}$$

**Theorem 1.** *For any given  $a > 1$  and  $s > 1$  for all  $m$  one has*

$$f(a^m, a^s) \geq \lceil C_1(s)m^{\log_2 \lambda} \rceil,$$

Here  $C_1(s)$  depends on  $s$  only and

$$C_1 \gg s^{-\log_2(s+1)-3},$$

where the constant in the sign  $\gg$  is absolute and  $\lambda$  is the largest root of the polynomial  $P_s(\lambda)$ .

Here we note that for the largest roots  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  of the polynomials (1) – (4) one has

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= s + 1 + \frac{\theta_1}{s^2}, & \text{where } \theta_1 &\in (-1, 0); \\ \lambda_2 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{\theta_2}{s^4}, & \text{where } \theta_2 &\in (0, 3); \\ \lambda_3 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} - \frac{\theta_3}{s^4}, & \text{where } \theta_3 &\in (-9, -6); \\ \lambda_4 &= s + 1 + \frac{\theta_4}{s^2}, & \text{where } \theta_4 &\in (-1, 0). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>research is supported by RFBR grant no. 09-01-00371a

**Theorem 2.** *There exists  $s_0 \in \mathbb{N}$  such that for  $N \geq a^{s_0}$  and for  $m$  large enough one has*

$$f(a^m, N) \geq \lceil C_2(N)m^{\log_2 \lambda} \rceil, \quad C_2(N) \gg 2^{-5 \log_2^2 \log_2 N},$$

where  $\lambda$  is the largest real root of -of the polynomial (3) with  $s = \lfloor \log_a N \rfloor$ .

We note that for  $s = 6$  the polynomial (4) is a characteristic polynomial for the matrix  $2A$  where

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 3.** *For  $m$  large enough and  $s = 6$  one has the following improvement of the bound from Theorem 1:*

$$f(a^m, a^6) \geq \left\lceil C m^{1+\frac{1}{5} \log_2 \mu} \right\rceil \asymp m^{\log_2 2^{\sqrt[5]{\mu}}},$$

here  $C > 0, \mu$  is the largest eigenvalue of the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^5 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

We note that for  $s = 6$  one has

$$2^{\sqrt[5]{\mu}} - \lambda > 0,0000756,$$

where  $\lambda$  is the lagrest eigenvalue of the matrix  $2A$ , and  $\mu$  is the largest eigenvalue of  $B$ .

**Theorem 4.** *For  $m \geq 8$  one has  $f(3^m, 4) \geq \lceil \frac{m+1}{4} \rceil$ .*

**Theorem 5.** *Let  $k \in \mathbb{Z}_+, k \geq 2$ . Then  $f(2^{2^k-1}, 3) \geq 2^k$*

# Количественные обобщения результатов Нидеррейтера о цепных дробях.

И.Д. Кан, Н.А. Кроткова <sup>2</sup>

## Аннотация

Пусть  $d$  - натуральное число  $\geq 2$ . Гипотеза Зарембы гласит, что существует  $c \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ , где  $(c, d) = 1$  и разложение  $\frac{c}{d}$  в цепную дробь имеет все неполные частные меньшие константы  $N$ . Предполагается, что  $N = 6$ , для простых  $d$  предполагается  $N = 4$ . В 1986 году Нидеррейтер доказал справедливость гипотезы Зарембы с  $N = 4$  для  $d$ , являющихся степенями 2 и 3 (см. [2]), а также для  $d$ , являющихся степенями 5 с  $N = 5$ . В настоящей работе будут получены количественные обобщения результатов Нидеррейтера, а именно, оценка снизу количества последовательностей с ограниченными элементами, континуант которых является степенью произвольного натурального числа  $a \geq 2$ . Также будет показана неулучшаемость некоторых оценок в рамках рассматриваемого метода.

## 1 Введение.

Пусть числа  $c, d \in \mathbb{N}$  таковы, что  $(c, d) = 1$ , где  $1 \leq c \leq d-1$ . Тогда  $\frac{c}{d}$  представима в виде цепной дроби

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = [0; a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_n],$$

где  $a_1, \dots, a_n$  - неполные частные (также называемые элементами цепной дроби) и  $a_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$ .

Знаменатель конечной цепной дроби  $[a_1, \dots, a_n] = [\mathbf{u}]$  - это функция от последовательности  $\mathbf{u} = (a_1, \dots, a_n)$ . Это число называется *континуантом*  $\mathbf{u}$  и обозначается  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  или  $\langle \mathbf{u} \rangle$ . Для каждой последовательности  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$  определим  $\mathbf{u}_- = (a_2, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{u}^- = (a_1, \dots, a_{n-1})$ . Будем также писать  $\{\mathbf{u}\}$  для последовательности  $(a_n, \dots, a_1)$ . Для пустого континуанта  $\mathbf{u}$  положим  $[\mathbf{u}] = \{\{\mathbf{u}\}\} = 0, \langle \mathbf{u} \rangle = 1$ .

**Утверждение 1.** (см. [1]) Пусть  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), n \geq 2$  - последовательность натуральных чисел. Тогда:

(1)

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & u_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & u_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & u_n \end{vmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00371a

$$(2) \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u_n, \dots, u_1 \rangle$$

$$(3) \text{ если } u_2 \neq 1, \text{ то } \langle 1, u_2 - 1, u_3, \dots, u_n \rangle = \langle u_2, \dots, u_n \rangle$$

Гипотеза Зарембы гласит, что для любого  $d \geq 2$  существует дробь  $\frac{c}{d}$ , все неполные частные которой строго меньше  $N$ . Предполагается, что  $N = 6$ . В 1986 году Нидеррейтер показал, что гипотеза верна для чисел  $d$ , являющихся степенями 2 и 3 с ограничением  $N = 4$ , а также для чисел  $d$  являющихся степенями 5 с ограничением  $N = 5$  (см. [2]). В 2002 году справедливость была доказана для  $d$  - степени 6 с  $N = 6$  [3], в 2005 году был получен положительный результат для  $d$ , имеющего вид  $7^{k \cdot 2^n}$ , где  $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  и  $N = 4$  [4]. В настоящей статье будет получена оценка снизу количества последовательностей натуральных чисел  $(a_1, \dots, a_n)$  с ограниченными элементами и континуантом, равным  $a^m$ , где  $a, m \in \mathbb{N}, a \geq 2, n$  — не фиксировано, из которой очевидно следует оценка снизу количества цепных дробей с ограниченными неполными частными и знаменателем, равным  $a^m$ . Общий результат сформулирован ниже.

## 2 Основные результаты.

Пусть  $a, m, s \in \mathbb{N}, a \geq 2$ . Будем рассматривать последовательности натуральных чисел  $a_1, \dots, a_n$  произвольной длины  $n$ , континуант которых  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  равен некоторой  $m$ -ой степени числа  $a$ , причем для элементов последовательностей выполнено:  $a_i < N, i = 1, \dots, n, N \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $f(a^m, N) = f_m$  - количество последовательностей указанного вида, континуант которых равен  $a^m$ . Определим также многочлен  $P_s = P_s(\lambda)$  при различных значениях  $s$ :

$$P_s(\lambda) = \begin{cases} \lambda^3 - s\lambda^2 - s\lambda - s, & \text{при } s \equiv 0 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (1) \\ \lambda^3 - (s+2)\lambda^2 + (s+2)\lambda - (s-2), & \text{при } s \equiv 2 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (2) \\ \lambda^3 - (s+2)\lambda^2 + s\lambda + (s+4), & \text{при } s \equiv 4 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (3) \\ \lambda^3 - s\lambda^2 - (s+2)\lambda + (s+2), & \text{при } s \equiv 6 \pmod{8}, s \geq 6 \quad (4) \\ \lambda^2 - 4\lambda - 4, & \text{при } s = 4 \quad (5) \\ \lambda - 2, & \text{при } s = 2 \quad (6) \\ \lambda - s - 1, & \text{при } s \equiv 1 \pmod{2}, s \geq 3 \quad (7). \end{cases}$$

**Теорема 1.** Для любых натуральных фиксированных  $a$  и  $s$ , не равных 1, для всех достаточно больших  $m$  справедлива оценка

$$f(a^m, a^s) \geq \lceil C_1(s)m^{\log_2 \lambda} \rceil,$$

растущая степенным образом по  $m$ ,

где положительное число  $C_1(s)$  зависит только от  $s$ ,

$$C_1 \gg s^{-\log_2(s+1)-3},$$

константа в знаке " $\gg$ " абсолютная,  $\lambda$  - наибольший из действительных корней многочлена  $P_s(\lambda)$ .

*Замечание 1.* Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  - наибольшие из действительных корней многочленов (1) – (4) соответственно. Тогда:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= s + 1 + \frac{\theta_1}{s^2}, & \text{где } \theta_1 &\in (-1, 0); \\ \lambda_2 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{\theta_2}{s^4}, & \text{где } \theta_2 &\in (0, 3); \\ \lambda_3 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} - \frac{\theta_3}{s^4}, & \text{где } \theta_3 &\in (-9, -6); \\ \lambda_4 &= s + 1 + \frac{\theta_4}{s^2}, & \text{где } \theta_4 &\in (-1, 0).\end{aligned}$$

**Теорема 2.** Существует  $s_0 \in \mathbb{N}$ , такое что при  $N \geq a^{s_0}$ , для достаточно больших  $m$  справедлива оценка (растущая по  $m$ ):

$$f(a^m, N) \geq \lceil C_2(N)m^{\log_2 \lambda} \rceil, \quad C_2(N) \gg 2^{-5 \log_2^2 \log_2 N},$$

$\lambda$  - наибольший из действительных корней многочлена (3) при  $s = \lfloor \log_a N \rfloor$ .

*Замечание 2.* При  $s = 6$  многочлен (4) является характеристическим для матрицы  $2A$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема 3.** При достаточно большом  $m$  и  $s = 6$  теорема 1 допускает улучшение. Справедлива оценка:

$$f(a^m, a^6) \geq \left\lceil C m^{1+\frac{1}{5} \log_2 \mu} \right\rceil \asymp m^{\log_2 2^{\sqrt[5]{\mu}}},$$

где  $C > 0$ ,  $\mu$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^5 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

*Замечание 3.* При  $s = 6$  выполняется следующее неравенство:

$$2^{\sqrt[5]{\mu}} - \lambda > 0,0000756,$$

где  $\lambda$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $2A$ ,  
 $\mu$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $B$ .

**Теорема 4.** При  $m \geq 8$  справедлива оценка:  $f(3^m, 4) \geq \left\lceil \frac{m+1}{4} \right\rceil$ .

**Теорема 5.** Пусть  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ , тогда справедлива оценка:  $f(2^{2^k-1}, 3) \geq 2^k$

*Замечание 4.* Утверждения теорем остаются верными, если вместо последовательностей рассматривать цепные дроби с ограниченными элементами.

### 3 Описание метода, основные леммы.

**Лемма 1.** [1] Пусть  $b \in \mathbb{N}, b > 1$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  - последовательность натуральных чисел, причем  $u_n > 1$ . Положим

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, 1, b - 1, u_n, \dots, u_1), \\ \mathbf{w}' &= (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, u_n + 1, u_{n-1}, \dots, u_1).\end{aligned}$$

. Тогда  $\langle \mathbf{w} \rangle = b \langle \mathbf{u} \rangle^2$ ,  $\langle \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle^2$ .

**Лемма 2.** Пусть задано  $m > s$ . Пусть  $b = a^r$ , где  $a, r \in \mathbb{N}_0$ ,  $a \geq 2$ ,  $r \leq s$ ,  $r \equiv m \pmod{2}$  и  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  - последовательность натуральных чисел, такая что  $1 \leq u_i \leq a^s - 1, i = 1, \dots, n$ ,  $u_1, u_n \neq 1, a^s - 1$  и  $\langle \mathbf{u} \rangle = a^{\frac{m-r}{2}}$ .

Тогда:

(1) Для последовательностей

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_J) = \begin{cases} (u_1, \dots, u_n, b - 1, 1, u_n - 1, u_{n-1}, \dots, u_1) & \text{при } r \neq 0, \\ (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, b - 1, 1, u_n, \dots, u_1) & \text{при } r \neq 0, \\ (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n + 1, u_n - 1, u_{n-1}, \dots, u_1) & \text{при } r = 0, \\ (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, u_n + 1, u_{n-1}, \dots, u_1) & \text{при } r = 0, \end{cases}$$

справедливо  $\langle \mathbf{w} \rangle = a^m$ ;

(2) для перечисленных последовательностей  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_J)$ :

- $J = 2(n + r)$ ;
- $1 \leq w_j \leq a^s - 1$  для  $1 \leq j \leq J$ ;
- $w_1, w_J \neq 1, a^s - 1$ ;
- все эти последовательности различны.

*Доказательство.* Все утверждения леммы 2 следуют из леммы 1, утверждения 1 и определения последовательностей.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть последовательности  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ ,  $\langle \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_2 \rangle = a^m$  получены из  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle = a^{m_1}$  и  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ ,  $\langle \mathbf{v} \rangle = a^{m_2}$  по лемме 2 с использованием  $b_1 = a^{r_1}$  и  $b_2 = a^{r_2}$  соответственно. Тогда, если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  различны, то  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  также различны.

*Доказательство.* Пусть последовательность  $\mathbf{u}$  удовлетворяет условию леммы 2, последовательность  $\mathbf{w}_1$  получена из  $\mathbf{u}$ . Тогда длина  $\mathbf{w}_1$  может быть равна  $2n$  или  $2n + 2$ . Аналогично, если  $\mathbf{v}$  удовлетворяет условию леммы 2, то длина  $\mathbf{w}_2$ , полученной из нее, может быть равна  $2k$  или  $2k + 2$ .

Рассмотрим 2 случая:

1. Пусть  $n = k$  (длины последовательностей совпадают). Тогда если  $r_1 = r_2 = 0$ , то последовательности  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  могут иметь вид

$$\mathbf{w}_1 = \begin{cases} (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n + 1, u_n - 1, u_{n-1}, \dots, u_1), \\ (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, u_n + 1, u_{n-1}, \dots, u_1); \end{cases}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + 1, v_n - 1, v_{n-1}, \dots, v_1), \\ (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n - 1, v_n + 1, v_{n-1}, \dots, v_1), \end{bmatrix}$$

Предположим, что  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ . Это невозможно, так как в этом случае, во-первых,  $(u_1, \dots, u_{n-1}) = (v_1, \dots, v_{n-1})$  и, во-вторых, либо  $u_n = v_n$ , либо  $u_n + 1 = v_n - 1$  и  $u_n - 1 = v_n + 1$  одновременно.

Если же  $r_1, r_2 > 0$ , то

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} (u_1, \dots, u_n, a^{r_1} - 1, 1, u_n - 1, u_{n-1}, \dots, u_1), \\ (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n - 1, 1, a^{r_1} - 1, u_n, \dots, u_1); \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} (v_1, \dots, v_n, a^{r_2} - 1, 1, v_n - 1, v_{n-1}, \dots, v_1), \\ (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n - 1, 1, a^{r_2} - 1, v_n, \dots, v_1). \end{bmatrix}$$

Если предположить, что  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ , получим, ввиду  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ ,

$$(u_1, \dots, u_n, a^{r_1} - 1, 1, u_n - 1, u_{n-1}, \dots, u_1) = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n - 1, 1, a^{r_2} - 1, v_n, \dots, v_1),$$

то есть  $u_n = v_n - 1$  и  $u_n - 1 = v_n$ , одновременно, что невозможно.

2. Пусть  $n = k + 1$  (длины последовательностей  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  отличаются на 1), тогда  $r_1 = 1, r_2 = 0$  и

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} (u_1, \dots, u_k, u_{k+1} + 1, u_{k+1} - 1, u_k, \dots, u_1), \\ (u_1, \dots, u_k, u_{k+1} - 1, u_{k+1} + 1, u_k, \dots, u_1); \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} (v_1, \dots, v_k, a^{r_2} - 1, 1, v_k - 1, v_{k-1}, \dots, v_1), \\ (v_1, \dots, v_{k-1}, v_k - 1, 1, a^{r_2} - 1, v_k, \dots, v_1), \end{bmatrix}$$

предположив, что  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ , получим  $v_k = u_k$  и  $v_k - 1 = u_k$  одновременно, что невозможно.  $\square$

*Замечание 5.* Пусть в результате применения леммы 2 была получена последовательность  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle = a^m$ ,  $1 \leq u_i \leq a^s - 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тогда для последовательностей  $(1, u_1 - 1, \dots, u_n)$ ,  $(u_1, \dots, u_n - 1, 1)$  и  $(1, u_1 - 1, \dots, u_n - 1, 1)$  выполнено:

1. континуанты равны  $a^m$ ;
2. элементы являются натуральными числами;
3. элементы строго ограничены сверху числом  $N = a^s$ .
4. указанные последовательности различны.

**Описание метода.** Для оценки  $f_m$ , где  $m \geq 2$ , будем использовать числа  $g_m$ , определенные следующим образом:

$$g_2 = \dots = g_{s+2} = 1;$$

при  $m \geq s+3$  числа  $g_m$  определяются рекуррентным соотношением

$$g_m = 2 \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv m \pmod{2}}}^s g_{\frac{m-r}{2}} = 2 \sum_{k=\lfloor \frac{m-s+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} g_k. \quad (9)$$

При  $s \geq 3$  для  $m = 2, \dots, s$  справедливо:  $f_m \geq 4g_m$ , так как для каждого из таких  $m$  будет существовать хотя бы одна последовательность натуральных чисел  $(u_1, \dots, u_n)$  с  $u_i < a^s, i = 1, \dots, n$ , у которой  $u_1, u_n \neq 1, a^s - 1$ . Это следует из существования для каждого такого  $m$  несократимых дробей со знаменателями  $a^m$ , числителями меньше  $\frac{a^m}{2}$ , неполные частные представления в виде цепной дроби которых ограничены (строго)  $a^s$ . Множитель 4 появляется согласно замечанию 5. Последовательности, континуанты которых равны  $a^{s+1}, a^{s+2}$  и  $a^{s+3}$ , будут существовать согласно лемме 2, примененной к последовательностям с континуантами  $a^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}, a^{\lfloor \frac{s-2}{2} \rfloor}$  и замечанию 5.

Для  $m \geq s+3$ , в результате применения лемм 2, 3 с различными  $r \in 1, \dots, s$ , где  $r = m \pmod{2}$ , получим, что  $f_m \geq g_m$ . Применение замечания 5 дает  $f_m \geq 4g_m$ . (Для случаев ограничений  $N$ , не рассмотренных здесь, рассуждения будут проведены отдельно.)

Метод состоит в том, чтобы дать возможно более точную нижнюю оценку для  $g_m$  на основании формулы (9), примененной достаточно большое количество раз.

**Теорема 6.** Пусть  $a, s \in \mathbb{N}, a \geq 2$ . В рамках рассматриваемого метода невозможно при фиксированном  $s$  и  $m \rightarrow \infty$  получить более точную (по сравнению с теоремой 1) по порядку оценку снизу для величины  $f(a^m, a^s)$  в случаях:

- (i) нечетного  $s \geq 3$ ,
- (ii)  $s = 4$ ,
- (iii)  $s = 2$ .

## 4 Доказательства теорем.

**Определение 1.** Для двух векторов  $u \in \mathbb{N}_0^n$  и  $v \in \mathbb{N}_0^n$  положим  $u > v$  ( $u \geq v$ ), если для каждого  $i, 1 \leq i \leq n$  выполнено  $u_i > v_i$  ( $u_i \geq v_i$ ).

Аналогично, для двух матриц  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{N}_0^{n^2}$  и  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{N}_0^{n^2}$  положим  $A > B$  ( $A \geq B$ ), если для каждой пары  $i, j : 1 \leq i, j \leq n$  выполнено  $a_{ij} > b_{ij}$  ( $a_{ij} \geq b_{ij}$ ).



Доказательство теоремы 1.

**Случай четного  $s \geq 6$ .**

Доказательство разобьем на 2 части:  $s = 2 \pmod{4}$  и  $s = 0 \pmod{4}$

1. Пусть  $s = 4q + 2, q \in \mathbb{N}$ . Для любого четного  $m > s + 2$  рекуррентная формула 9 для  $g_m$  содержит  $\frac{s}{2} + 1$  слагаемое, а для нечетного  $m > s + 2$  указанная сумма имеет  $\frac{s}{2}$  слагаемых. Выделим среди чисел  $g_m, m \geq 2$  классы  $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{g_l | l \equiv 0 \pmod{2}\} \\ A_2 &= \{g_l | l \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{g_l | l \equiv 1 \pmod{4}\} \\ A_3 &= \{g_l | l \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, при  $m \geq s + 3$ , принадлежность  $g_m$  классу можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{g_m | \text{сумма в (9) содержит } \frac{s}{2} + 1 \text{ слагаемых, из которых } \lceil \frac{s}{4} \rceil \text{ четные}\}, \\ A_2 &= \{g_m | \text{сумма в (9) содержит хотя бы } \frac{s}{2} \text{ слагаемых, из которых хотя бы } \lceil \frac{s}{4} \rceil \text{ четные}\} \\ A_3 &= \{g_m | \text{сумма в (9) содержит хотя бы } \frac{s}{2} \text{ слагаемых, из которых хотя бы } \lfloor \frac{s}{4} \rfloor \text{ четные}\}. \end{aligned}$$

Пусть дано достаточно большое  $m$ . Тогда результат одного шага оценки  $g_m$  по рекуррентной формуле (9) можно записать, используя скалярное умножение вектора-строки на вектор-столбец, следующим образом:

$$g_m \geq 2(q, \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{q+1}{2} \rceil) \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ a_3^0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $a_1^0, a_2^0, a_3^0$  - наименьшие из элементов классов  $A_1, A_2$  и  $A_3$  соответственно, получившихся после применения одного шага рекуррентной формулы;  $q, \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{q+1}{2} \rceil$  - количества элементов, заведомо принадлежащих каждому из классов, получившихся после применения формулы. Причем  $\lceil \frac{q+1}{2} \rceil$  - количество элементов  $A_2$ , не учтенных при подсчете количества элементов  $A_1$ ;  $\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$  - количество элементов  $A_3$ , не учтенное при подсчете элементов  $A_1$  и  $A_2$ .

После первого применения формулы (9), к каждому слагаемому, входящему в получившуюся сумму, также применим эту рекуррентную формулу, и т.д. Рассмотрим последовательность вложенных интервалов  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$ , соответствующих интервалам изменения индексов  $k$  слагаемых  $g_k$ , входящих в сумму (9) для  $g_m$  после  $j$  применений рекуррентной формулы, где  $j = 1, \dots, n + 1$ .

$$\begin{aligned} I_0 &= \left\{ v \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{m-s+1}{2} \rfloor \leq v \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right\}, & i_0 &= \min_{v \in I_0} v; \\ I_1 &= \left\{ v \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{i_0-s+1}{2} \rfloor \leq v \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right\}, & i_1 &= \min_{v \in I_1} v; \\ & \dots\dots\dots & & \\ I_{n-1} &= \left\{ v \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{i_{n-2}-s+1}{2} \rfloor \leq v \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right\}, & i_{n-1} &= \min_{v \in I_{n-1}} v; \\ I_n &= \left\{ v \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{i_{n-1}-s+1}{2} \rfloor \leq v \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right\}, & i_n &= \min_{v \in I_n} v, \end{aligned} \quad (12)$$

Число  $n = n(m)$  мы хотим выбрать как можно больше. Единственным ограничением является условие  $i_{n-1} \geq s+3$  (иначе дальнейшее применение формулы (9) незаконно). Таким образом,  $i_n = \max\{j \mid i_{j-1} \geq s+3\}$ .

Определим также числа  $a_j^i$ ,  $i = 1, \dots, n; j = 1, 2, 3$ :

$$a_j^i = \min\{g_k \in A_i \mid k \in I_j\}.$$

**Лемма 4.** Для  $l = 0, \dots, n-1$ :

$$\begin{pmatrix} a_1^l \\ a_2^l \\ a_3^l \end{pmatrix} \geq 2A \begin{pmatrix} a_1^{l+1} \\ a_2^{l+1} \\ a_3^{l+1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} q+1 & \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor & \lceil \frac{q+1}{2} \rceil \\ q+1 & \lfloor \frac{q}{2} \rfloor & \lceil \frac{q}{2} \rceil \\ q & \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor & \lceil \frac{q+1}{2} \rceil \end{pmatrix} \quad (13)$$

*Доказательство.* Действительно, для каждого  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_j^l$  - это наименьший из элементов класса  $A_j$ , получившихся после  $l+1$  применений рекуррентной формулы (9). Продолжим оценку этого элемента по рекуррентной формуле. Подсчитаем, сколько индексов  $k$  в сумме (9) для  $a_j^l$  гарантированно принадлежат классам  $A_1$  и  $A_2$  (остальные учтем как принадлежащие  $A_3$ ). Число  $a_1^l$  будет оцениваться снизу удвоенной суммой  $q+1$  элемента класса  $A_1$ ,  $\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$  элементов класса  $A_2$  и  $\lceil \frac{q+1}{2} \rceil$  элементов класса  $A_3$ , причем индексы указанных элементов принадлежат  $[i_{l+1}, i_{l+1} + \frac{s+2}{2}]$ ; указанное выражение не меньше, чем сумма, получающаяся при умножении первой строки матрицы  $2A$  на столбец  $(a_1^{l+1}, a_2^{l+1}, a_3^{l+1})^\top$ , так как  $a_j^{l+1}$  где  $j = 1, 2, 3$  - наименьшие из элементов соответствующих классов с индексами, принадлежащими  $[i_{l+1}, i_{l+1} + \frac{s+2}{2}]$ . Аналогично рассматривается  $a_2^l$  и  $a_3^l$  и, соответственно, вторая и третья строки матрицы  $A$ .  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $n$  - максимально возможно количество применений формулы (9) при вычислении  $g_m$ , ограниченное условием  $i_{n-3} \geq s+3$ , тогда

$$n \geq \left\lceil \log_2 \left\lfloor \frac{m-s+1}{4s+4} \right\rfloor \right\rceil. \quad (14)$$

*Доказательство.* Заметим, что  $i_j \leq 2i_{j+1} + s$ , поэтому

$$i_0 \leq 2i_1 + s \leq 2(2i_2 + s) + s \leq \dots \leq 2^n i_n + (2^n - 1)s, \text{ где } i_n \in \{2, \dots, s+2\}.$$

Отсюда

$$n \geq \min_{i_n \in \{2, \dots, s+2\}} \log_2 \left( \frac{i_0 + s}{i_n + s} \right) = \log_2 \left( \frac{\lfloor \frac{m-s+1}{2} \rfloor + s}{2s+2} \right).$$

Таким образом,

$$n \geq \left\lceil \log_2 \left\lfloor \frac{m-s+1}{4(s+1)} \right\rfloor \right\rceil. \quad \square$$

**Лемма 6.** Пусть  $\lambda$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $2A$ , где  $A$  определена в (13), тогда:

$$(q, \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor, \lceil \frac{q+1}{2} \rceil)(2A)^n \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix} \geq \frac{1}{3} \lambda^n. \quad (15)$$

*Доказательство.* Так как матрица  $A$  слева и справа домножается на вектора из положительного октанта, то

$$(q, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor)(2A)^n \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix} \geq \max(2A)^n, \quad (16)$$

где  $\max(2A)^n$  - максимальный элемент матрицы  $(2A)^n$ .

Пусть  $\bar{x}$  - собственный вектор матрицы  $2A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$  и

$|\bar{x}| = \max(x_j \mid j = 1, 2, 3)$ , тогда

$$2A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad (2A)^n\bar{x} = \lambda^n\bar{x}.$$

Оценим  $|(2A)^n\bar{x}|$ :

с одной стороны  $|(2A)^n\bar{x}| = |\lambda^n\bar{x}| = \lambda^n|\bar{x}|$  так как  $\lambda > 0$ ;

с другой стороны, для некоторого  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$|(2A)^n\bar{x}| = |a_{i1}^{(n)}x_1 + a_{i2}^{(n)}x_2 + a_{i3}^{(n)}x_3| \leq 3\max(2A)^n|\bar{x}|, \text{ где } (2A)^n = (a_{ij}^{(n)}).$$

Поэтому,

$$\max(2A)^n \geq \frac{1}{3}\lambda^n. \quad (17)$$

Объединяя неравенства (16) и (17), получаем

$$(q, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor)(2A)^n \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix} \geq \frac{1}{3}\lambda^n.$$

□

Применение лемм 4, 5 и 6 позволяет при  $m \geq 5s+5$  продолжить неравенство (11):

$$\begin{aligned} g_m &\geq 2(q, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor)(2A)^n \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix} \geq \frac{2}{3}(\lambda)^{\lceil \log_2 \lfloor \frac{m-s+1}{4s+4} \rfloor \rceil} \geq \\ &\geq \frac{2}{3} \frac{\lambda^{\log_2 m}}{\lambda^{\log_2(s+1)+3}} \gg \frac{1}{s^{\log_2(s+1)+3}} m^{\log_2 \lambda}, \end{aligned} \quad (18)$$

где константа в знаке  $\gg$  является абсолютной.

**Лемма 7.** Наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $2A$ , где матрица  $A$  определена в (13), - это наибольший из действительных корней

(i) многочлена (2), при  $s = 8r + 2, l \in \mathbb{N}$ ;

(ii) многочлена (4), при  $s = 8r + 6, l \in \mathbb{N}_\neq$ ;

*Доказательство.* В случаях (i) и (ii) матрица  $A$  принимает, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 2r+1 & r & r+1 \\ 2r+1 & r & r \\ 2r & r & r+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2r+2 & r+1 & r+1 \\ 2r+2 & r & r+1 \\ 2r+1 & r+1 & r+1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, характеристическим для матрицы  $2A$  в случае (i) будет многочлен (2), а в случае (ii) - многочлен (4). □

2. Пусть  $s = 4q$ , где  $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$

Заметим, что для любого четного  $m > s + 2$  рекуррентная формула (9) для  $g_m$  содержит  $\frac{s}{2} + 1$  слагаемое, а для любого нечетного  $m > s + 2$  указанная сумма имеет  $\frac{s}{2}$  слагаемых. Выделим среди чисел  $g_m, m \geq 2$  классы  $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{g_l | l \equiv 0 \pmod{4}\} \\ A_2 &= \{g_l | l \equiv 0 \pmod{2}\} \\ A_3 &= \{g_l | l \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, при  $m \geq s + 3$ , принадлежность  $g_m$  классу можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{g_m | \text{сумма в (9) имеет } \frac{s}{2} + 1 \text{ слагаемое, из которых } \lceil \frac{s+2}{4} \rceil \text{ четные}\} \\ A_2 &= \{g_m | \text{сумма в (9) имеет } \frac{s}{2} + 1 \text{ слагаемое, из которых хотя бы } \lfloor \frac{s+2}{4} \rfloor \text{ четные}\} \\ A_3 &= \{g_m | \text{сумма в (9) имеет хотя бы } \frac{s}{2} \text{ слагаемых, из которых хотя бы } \lfloor \frac{s}{4} \rfloor \text{ четные}\} \end{aligned}$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при рассмотрении предыдущего случая, получаем вид матрицы  $A$  и для каждого  $m \geq 5s + 5$  оценку  $g_m$ :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor & \lceil \frac{q+1}{2} \rceil & q \\ \lfloor \frac{q}{2} \rfloor & \lceil \frac{q}{2} \rceil & q+1 \\ \lfloor \frac{q}{2} \rfloor & \lceil \frac{q}{2} \rceil & q \end{pmatrix}, \tag{20} \\ g_m &\geq 2\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil, q\right)(2A)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \frac{2}{3} \lambda^{\lceil \log_2 \lfloor \frac{m-s+1}{4s+4} \rfloor \rceil} \geq \\ &\geq \frac{2}{3} \frac{\lambda^{\log_2 m}}{\lambda^{\log_2(s+1)+3}} \gg \frac{1}{s^{\log_2(s+1)+3}} m^{\log_2 \lambda} \end{aligned}$$

**Лемма 7'.** Наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $2A$ , где матрица  $A$  определена в (20), - это наибольший из действительных корней

- (i) многочлена (1), при  $s = 8r, l \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) многочлена (3), при  $s = 8r + 4, l \in \mathbb{N}$ ;

*Доказательство.* В случаях (i) и (ii) матрица  $A$  принимает вид

$$\begin{pmatrix} r & r+1 & 2r \\ r & r & 2r+1 \\ 2r & r & r+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r+1 & r+1 & 2r+1 \\ r & r+1 & 2r+2 \\ r & r+1 & 2r+1 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическим для матрицы  $2A$  будет многочлен (1) или (3) соответственно.

□

### Случай s=4.

Необходимо среди чисел  $g_m, m \geq 2$  выделить классы

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ g_m \mid m \equiv 0 \pmod{2} \} \\ A_2 &= \{ g_m \mid m \geq 2 \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда, как и в случае четного  $s \geq 6$ , введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Пусть  $\lambda$  - наибольшее из собственных значений матрицы  $2A$ .

Снова рассмотрим интервалы  $I_0 \subset \dots \subset I_n$ , числа  $i_0, \dots, i_n$  (12) и числа  $a_i^j = \min\{g_k \in A_i \mid k \in I_j\}$ , тогда для каждого  $m > s + 2$

$$g_m \geq 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

если  $m \geq 25$ , то продолжим неравенство (23):

$$g_m \geq 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} (2A)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \lambda^{\lceil \log_2 \lfloor \frac{m-3}{20} \rfloor \rceil} \gg m^{\log_2 \lambda}$$

### Случай s=2.

Пусть  $a = 2$ . Для  $m = 6, 7, \dots, 11$  положим  $g_6 = \dots = g_{11} = 1$ , так как существуют последовательности, удовлетворяющие условию нашей теоремы, действительно:

$$\begin{aligned} 2^6 &= \langle 2, 1, 3, 1, 1, 2 \rangle, \\ 2^7 &= \langle 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2 \rangle, \\ 2^8 &= \langle 2, 3, 3, 1, 3, 2 \rangle, \\ 2^9 &= \langle 2, 3, 2, 1, 1, 1, 3, 2 \rangle, \\ 2^{10} &= \langle 2, 3, 2, 3, 1, 1, 3, 2 \rangle, \\ 2^{11} &= \langle 2, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 2 \rangle. \end{aligned}$$

Для  $m \geq 12$  значения  $g_m$  вычисляются по рекуррентной формуле (9), которая теперь принимает вид

$$g_m \geq 2g_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}. \quad (24)$$

В этом случае, в обозначениях (12),  $i_n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ . Оценим снизу максимальное число  $n = n(m)$  применений рекуррентной формулы (9) для вычисления  $g_m$ . Используя такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 5, получаем:

$$m \geq 2^n(i_n + 1),$$

откуда

$$n \geq \left\lceil \log_2 \frac{m+1}{12} \right\rceil.$$

Тогда для  $m \geq 12$  неравенство (24) можно продолжить:

$$g_m \geq 2^n g_{i_n} \geq 2^{\lceil \log_2 \frac{m+1}{12} \rceil} \geq \frac{m+1}{12}.$$

Если  $a > 2$ , положим  $g_2 = g_3 = g_4 = 1$  (так как существуют последовательности, удовлетворяющие условию теоремы, континуанты которых равны, соответственно,  $a^2, a^3, a^4$  с неполными частными, ограниченными  $a^2$ ). Для  $m \geq 5$  значения  $g_m$  вычисляются по рекуррентной формуле (24). Максимальное количество применений рекуррентной формулы  $n = \lceil \log_2 \frac{m+1}{5} \rceil$ . Таким образом, при  $m \geq 5$  получаем  $g_m \geq \frac{m+1}{5}$ .

### Случай нечетного $s \geq 3$ .

В рекуррентную формулу для  $g_m$ , где  $m > s + 2$  входит  $\frac{s+1}{2}$  слагаемое, не зависимо от четности  $m$ . Таким образом, для  $m > 5s + 5$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} g_m &= 2 \left( g_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + \dots + g_{\lfloor \frac{m-s+1}{2} \rfloor} \right) \geq 2 \frac{s+1}{2} \min_{v \in [i_0, i_0 + \frac{s+1}{2}]} g_v \geq (s+1)^2 \min_{v \in [i_1, i_1 + \frac{s+1}{2}]} g_v \geq \dots \geq \\ &\geq (s+1)^n \geq (s+1)^{\lceil \log_2 \lfloor \frac{m-s+1}{4s+4} \rfloor \rceil} \geq \frac{(s+1)^{\log_2 m}}{(s+1)^{3+\log_2(s+1)}} = \frac{m^{\log_2(s+1)}}{(s+1)^{3+\log_2(s+1)}}. \end{aligned}$$

При оценке было использовано, что интервалы  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  изменения индексов слагаемых, входящих в рекуррентную формулу для  $g_m$  соответствуют (12) и  $i_k, k \in 1, 2, \dots, n$ . Также было использовано, что  $n$  - максимальное количество применений формулы (9) - может быть оценено согласно лемме 5.

Теорема 1 полностью доказана.  $\square$

**Лемма 8 (О сравнении корней многочленов (1)-(4) и (7)).** Среди наибольших действительных корней многочленов (1)-(4) и (7) наименьшим при всех достаточно больших  $s$  является корень многочлена (3).

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_7$  - наибольшие из корней многочленов (1), (2), (3), (4) и (7) соответственно. Тогда  $\lambda_i \in (s, s+1)$ , при  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , то есть  $\lambda_i = \underline{O}(s)$ . Следовательно, для  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1^3 &= s\lambda_1^2 + s\lambda_1 + s, \\ \lambda_1 &= s + \frac{s}{\lambda_1} + \bar{O}(1), \text{ получаем} \\ \lambda_1 &= s + 1 + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = \underline{O}\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

Поставляя это выражение в многочлен (1) и приравнивая к нулю, получаем

$$\begin{aligned} (s+1+\varepsilon)^3 - s(s+1+\varepsilon)^2 - s(s+1+\varepsilon) - s &= 0, \text{ или, эквивалентно,} \\ \varepsilon^3 + (2s+3)\varepsilon^2 + (s^2+3s+3)\varepsilon + 1 &= 0, \text{ откуда} \\ \varepsilon &= -\frac{1}{(s^2+3s+3)} - \underbrace{\frac{(2s+3)\varepsilon^2}{(s^2+3s+3)} + \frac{\varepsilon^3}{(s^2+3s+3)}}_{\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)} = -\frac{1}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = s + 1 - \frac{1}{s^2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^3}\right) = s + 1 + \frac{\theta_1}{s^2},$$

где  $\theta_1 \in (-1, 0)$ .

Проводя аналогичные рассуждения для  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  получаем:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^3}\right), \\ \lambda_3 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^3}\right), \\ \lambda_4 &= s + 1 - \frac{1}{s^2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^3}\right) = s + 1 + \frac{\theta_4}{s^2}.\end{aligned}$$

где  $\theta_4 \in (-1, 0)$

Таким образом, необходимо сравнить при  $s \rightarrow \infty$  величины  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ .

Для этого положим

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \varphi_2, \\ \lambda_3 &= s + 1 - \frac{3}{s^2} + \varphi_3, \text{ где } \varphi_2, \varphi_3 = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned}$$

и подставим значения  $\lambda_2$ , и  $\lambda_3$  в соответствующие многочлены. Получим

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{3}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^5}\right) = \frac{3}{s^3} + \frac{\theta_2}{s^4}, \text{ где } \theta_2 \in (0, 3); \\ \varphi_3 &= \frac{3}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^5}\right) = \frac{3}{s^3} - \frac{\theta_3}{s^4}, \text{ где } \theta_3 \in (-9, -6).\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая что для каждого  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  значение  $\lambda_i < s + 1$ , получаем, что наименьшим из  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  при  $s \rightarrow \infty$  является

$$\lambda_3 = s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} - \frac{\theta_3}{s^4}, \quad \theta_3 \in (-9, -6).$$

*Замечание 6.* Более точное выражение для  $\lambda_3$ :

$$\lambda_3 = s + 1 - \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{9}{s^5} - \frac{15}{s^6} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{s^7}\right). \quad (25)$$

□

*Доказательство теоремы 2.*

Согласно лемме 8, найдется  $s_0 \in \mathbb{N}$ , такое что для всех  $s \geq s_0$  наименьшим среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, s + 1$  является  $\lambda_3$ . Рассмотрим произвольное  $N \in \mathbb{N}, N \geq a^{s_0}$ , и применим теорему 1 для  $s = \lfloor \log_2 N \rfloor$ . Тогда для достаточно больших  $m$  получим:

$$f_m \geq 4g_m \geq C_3(N)m^{\log_2 \lambda_3},$$

где  $C_3(N)$  имеет вид:

$$C_3 \geq (s + 1)^{-3 - \log_2(s+1)} \geq \frac{1}{2^{5 \log_2 \log_2 N}}.$$

□

*Доказательство теоремы 3.*

Как и при доказательстве теоремы 1 выделим среди чисел  $g_m, m \geq 1$  классы  $A_1 \subset A_2 \subset A_3$  (10). Матрица  $A$  будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

В основе доказательства лежит

**Лемма 9.** *Для достаточно большого  $m$  можно утверждать, что хотя бы на одном из 4-х последовательных шагов вычисления  $g_m$  по рекуррентной формуле (9) встретилось слагаемое, индекс которого сравним с 5 по модулю 8.*

. Доказательство проходит перебором всевозможных остатков при делении  $m$  на 128. Для примера рассмотрим "наихудший" случай, то есть когда слагаемое, индекс которого сравним с 5 по модулю 8, появляется на 4-м шаге: пусть  $m = 83 + 128k, k \in \mathbb{N}$ , тогда

$$\begin{aligned} g_{83+128k} &= 2(g_{41+64k} + g_{40+64k} + g_{39+64k}) = \\ &= 4(2g_{20+32k} + 3g_{19+32k} + 3g_{18+32k} + 2g_{17+32k}) = \\ &= 8(2g_{10+16k} + 8g_{9+16k} + 10g_{8+16k} + 10g_{7+16k} + 5g_{6+16k}) = \\ &= 16(2g_{5+8k} + 20g_{4+8k} + 35g_{3+8k} + 35g_{2+8k} + 25g_{1+8k} + 5g_{8k}), \end{aligned}$$

□

и интересующее нас слагаемое - первое в полученном выражении.

**Лемма 10.** *Пусть для достаточно большого  $m$  при вычислении  $g_m$  по формуле (9), появилось слагаемое с индексом, сравнимым с 5 по модулю 8. Тогда при следующем применении формулы (9) появится слагаемое, заведомо принадлежащее классу  $A_2$ , но не учтенное, как принадлежащее этому классу (то есть учтенное как число из  $A_3$ ).*

*Доказательство.* Если  $l = 5 \pmod{8}$ , то  $l$  - нечетно. Следовательно,  $g_l$  могло быть учтено как член класса  $A_2$  или  $A_3$ . Если оно было учтено как член  $A_2$ , то на следующем шаге мы получим 2 элемента из класса  $A_1$  и один из  $A_2$  вместо 2 элементов из  $A_1$  и одного из  $A_3$ . Если же  $g_l$  учтено как элемент класса  $A_3$ , то получаем 2 элемента из  $A_1$  и один из  $A_2$  вместо одного из  $A_1$ , одного из  $A_2$  и одного из  $A_3$ . Заметив, что  $A_1 \subset A_2$ , получим утверждение леммы.

□

**Лемма 11.** *Для достаточно большого  $m$ , при  $0 \leq i \leq n-5-5t$  ( $t \in \mathbb{N}_0$ ,  $n$  определено в (12)) верно:*

$$\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix} \geq 2^5 B^t (2A)^5 \begin{pmatrix} a_1^{i+5t+5} \\ a_2^{i+5t+5} \\ a_3^{i+5t+5} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$B = A^5 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



*Доказательство.* При  $t = 0$  утверждение леммы следует из леммы 4, примененной 5 раз. Пусть лемма уже доказана для некоторого  $t \geq 0$ .

Сформулируем полученные выше результаты в терминах матриц. Согласно леммам 9 и 10, для любого  $i$  найдется  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ , такое что на  $i+j$ -ом шаге применения формулы (8) появится слагаемое, принадлежащее классу  $A_2$ , учтенное как элемент из  $A_3$  (в терминах леммы 4). Другими словами,

$$\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix} \geq 2^j \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^j + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1^{i+j} \\ a_2^{i+j} \\ a_3^{i+j} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

Возьмем наименьшее из таких  $j$ . Для оценки вектора из правой части еще  $5-j$  раз применим лемму 4, ввиду чего

$$\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix} \geq 2^j \left( A^j + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) (2A)^{5-j} \begin{pmatrix} a_1^{i+5} \\ a_2^{i+5} \\ a_3^{i+5} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

Докажем, что лемма верна для  $t+1$ . Применяя индуктивное предположение к вектору из правой части (29), получим:

$$\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix} \geq 2^5 \left( A^5 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} A^{5-j} \right) (2^5 B)^t (2A)^5 \begin{pmatrix} a_1^{i+5t+10} \\ a_2^{i+5t+10} \\ a_3^{i+5t+10} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

Лемма будет доказана, если показать, что минимум по  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$  произведения матриц в (30) (в смысле определения 1) будет достигнут при  $j = 5$ . Для доказательства этого факта оценим снизу произведение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} A^{5-j} (2^5 B)^t (2A)^5$$

Для этого положим

$$C = \begin{cases} B, & \text{при } t \geq 1, \\ A^5, & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

и проверим конечным перебором по  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ , что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} A^{5-j} C \geq \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} C.$$

Таким образом, минимум достигается при  $j = 5$ .

Лемма доказана. □

Пусть  $\lambda$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $2A$ , где  $A$  определено в (26);  $\mu$  - наибольшее из действительных собственных значений матрицы  $B$  (8). Тогда  $2\sqrt[5]{\mu} - \lambda \geq 0.0000756$  (что может быть проверено непосредственно на компьютере).

Таким образом, используя леммы 9-11, для достаточно больших  $m$  можно дать более точную оценку для  $g_m$ , чем та, что получена в теореме 1:

$$g_m \gg m^{1+\frac{1}{7}\log_2 \mu}.$$

□

*Доказательство теоремы 4.*

Будем рассматривать последовательности  $(a_1, \dots, a_n)$  произвольной длины  $n$ , для которых

1. континуант  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = 3^m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ,
2.  $a_i \leq 3, i = 1, \dots, n$ ,
3.  $a_1, a_n = 2$ .

Для  $m = 1, 2, 3$  последовательностей, удовлетворяющих указанным выше условиям, не существует. Однако,

$$\begin{aligned} 3^4 &= \langle 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle, \\ 3^5 &= \langle 2, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 2 \rangle, \\ 3^6 &= \langle 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 2 \rangle, \\ 3^7 &= \langle 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $m \geq 8$  возможно применить вычисления по рекуррентной формуле:

$$g_m = 2g_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}. \quad (31)$$

Тогда для  $m \geq 8$  получаем следующую оценку:

$$g_m \geq 2^{\lfloor \log_2(\frac{m+1}{8}) \rfloor} \geq \frac{m+1}{16}.$$

Учитывая замечание 5, получаем утверждение теоремы. □

*Доказательство теоремы 5.*

Рассмотрим последовательность  $(2, 1, 2)$ , для которой  $\langle 2, 1, 2 \rangle = 2^{2^1-1}$ . Пусть  $g_{2^2-1} = 1$ , для каждого  $k \geq 3$  положим  $g_{2^k-1} = 2g_{2^{k-1}-1}$ . Так как  $f_{2^2-1} \geq g_{2^2-1}$ , применяя лемму 2 с  $b = 2$  к указанной выше последовательности получим, что для каждого  $k \geq 3$   $f_{2^k-1} \geq g_{2^k-1} = 2^k$ .

В итоге, с учетом замечания 5, получим  $f_{2^{2^k}-1} \geq 2^k$ . □

*Доказательство теоремы 6.*

Покажем, что применением описанного метода в некоторых случаях невозможно получить более точную по порядку величины  $m$  оценку, чем та, что доказана в теореме 1.

(i) Согласно описанию используемого метода  $g_2 = \dots = g_{s+2} = 1$ . В рекуррентную формулу для  $g_m$ , где  $m > s + 2$  входит  $\frac{s+1}{2}$  слагаемое.

Таким образом, для  $m > 5s + 5$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} g_m &= 2 \left( g_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + \dots + g_{\lfloor \frac{m-s+1}{2} \rfloor} \right) \leq 2 \frac{s+1}{2} \max_{v \leq 2^{-1}m} g_v \leq (s+1)^2 \max_{v \leq 2^{-2}m} g_v \leq \dots \leq \\ &\leq (s+1)^n \max_{v \leq 2^{-n}m} g_v \leq m^{\log_2(s+1)}. \end{aligned}$$

При оценке было использовано, что интервалы  $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$  изменения индексов слагаемых, входящих в рекуррентную формулу для  $g_m$  соответствуют (12). Также было использовано, что количество  $n$  - применений формулы не может превышать  $\log_2 m$ .

(ii) Рассмотрим числа  $g_m$ , введенные при описании метода, такие что  $m = 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$ , а также числа  $b_j^i = \max\{g_l \in A_i, \mid l \in \{2^{k-1-j} - 1, 2^{k-1-j} - 3\}\}$ . Напомним, что  $A_i$  для  $i = 1, 2$  определены в (21).

При  $k \geq \log_2 5s + 6$  применим рекуррентную формулу вычисления  $g_m$  (9). Получим:

$$\begin{aligned} g_{2^k-1} &= 2(g_{2^{k-1}-1} + g_{2^{k-1}-2}) = 2(1, 1) \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \end{pmatrix} = 4(1, 1) \begin{pmatrix} g_{2^{k-2}-1} + g_{2^{k-2}-2} + g_{2^{k-2}-3} \\ g_{2^{k-2}-1} + g_{2^{k-2}-2} \end{pmatrix} \leq \\ &\leq 4(1, 1) \begin{pmatrix} 2 \max(g_{2^{k-2}-1}, g_{2^{k-2}-3}) + g_{2^{k-2}-2} \\ \max(g_{2^{k-2}-1}, g_{2^{k-2}-3}) + g_{2^{k-2}-2} \end{pmatrix} = 4(1, 1) A \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{pmatrix} \leq \\ &\leq 8(1, 1) A \begin{pmatrix} 2 \max(g_{2^{k-3}-1}, g_{2^{k-3}-3}) + g_{2^{k-3}-2} \\ \max(g_{2^{k-3}-1}, g_{2^{k-3}-3}) + g_{2^{k-3}-2} \end{pmatrix} = 8(1, 1) A^2 \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \leq \dots \leq \\ &\leq 2^{k-3}(1, 1) A^{k-5} \begin{pmatrix} 2 \max(g_{2^3-1}, g_{2^3-3}) + g_{2^3-2} \\ \max(g_{2^3-1}, g_{2^3-3}) + g_{2^3-2} \end{pmatrix} \leq 2^{k-3}(1, 1) A^{k-5} \begin{pmatrix} 2g_7 + g_6 \\ g_7 + g_6 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{k-3}(1, 1) A^{k-4} \begin{pmatrix} g_6 \\ g_7 \end{pmatrix} = 2^{k-3}(1, 1) A^{k-4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ll \lambda^{\log_2(m+1)} \ll m^{\log_2 \lambda}, \end{aligned}$$

Оценка сверху степени матрицы получена стандартным образом с помощью приведения матрицы  $A$  к жордановой форме. Таким образом, при вычислении  $g_m$  указанного вида невозможно с помощью нашего метода получить оценку снизу лучше заявленной в теореме 1.

(iii) В случае  $s = 2$  для  $m$  - четного в рекуррентной формуле (9) для  $g_m$  может быть два слагаемых, а для нечетного  $m$  - одно слагаемое. Следовательно, для  $m \geq 23$ , такого что  $m = 2^k - 1$ , где  $k \in \mathbb{N}$  получаем:

$$g_{2^k-1} = 2g_{2^{k-1}-1} = 4g_{2^{k-2}-1} = \dots = 2^{k-4}g_{15} = 2^{k-3} = \frac{1}{8}2^{\log_2(m+1)} = \frac{1}{8}(m+1).$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. □

## Список литературы

- [1] Doug Hensley *Continued fractions* World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., 2006
- [2] H. Niederreiter, *Dyadic fractions with small partial quotients*, Mh. Math. 101 (1986), 309-315.
- [3] Monrudee Yodphotong and Vichian Laohakosol, *Proofs on Zaremba's Conjecture for Powers of 6*, Proceedings of the International Conference on Algebra and Its Applications 2002, 278-282.
- [4] Takao Komatsu *On a Zaremba's Conjecture For Powers*, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol.1(13). 2005, 9-13.